Determinación del valor de la vuelta del tornillo micrométrico en instrumentos astronómicos

(APLICACION DEL METODO DE LOS CUADRADOS MINIMOS)

RÓMULO GRANDÓN M.

Una de las piezas esenciales de los instrumentos astronómicos cuando se trata de medir distancias angulares con la mayor precisión es el tornillo micrométrico. Esta clase de tornillos son trabajados con el mayor esmero para evitar que los pasos en sus distintas partes sean desiguales; además, el contacto del extremo del tornillo con el carro al cual da movimiento debe satisfacer a ciertas condiciones esenciales, sin las cuales las indicaciones del tornillo no son exactas y los errores resultantes pueden ser de carácter accidental, periódico o progresivo. Los delicados tornillos fabricados en la actualidad se puede decir que carecen de errores progresivos o periódicos; a pesar de esto, es conveniente hacer el estudio de estos posibles errores, para lo cual se debe disponer de instalaciones especiales, en caso de querer hacer ese estudio en la forma más perfecta. Así es posible descubrir también los errores accidentals, que si llegan a pasar de ciertos límites obligarían a rechazar el tornillo. En lo que sigue sólo nos referiremos a la determinación del valor angular de la vuelta del tornillo en la forma como se efectúa en los instrumentos astronómicos, pero haciendo los cálculos en una forma que no es la corriente.

Existen diversos métodos para determinar el valor angular de una vuelta del tornillo micrométrico. Desde luego, si se conoce el paso del tornillo en milímetros o fracción de milímetro (actualmente se fabrican tornillos cuyo paso alcanza a un quinto de milímetro, o quizás menos) y la distancia focal del objetivo del anteojo al cual se va a adaptar, un sencillo cálculo da el valor de la vuelta en medida angular, ya que ésta es, con suficiente aproximación, sencillamente el ángulo con vértice en el centro óptico del objetivo y que subtiende, en el plano focal de éste el arco correspondiente al paso lineal del tornillo. Así, si se tiene un tornillo cuyo paso vale p milímetros y se adapta a un anteojo cuyo objetivo tiene una distancia focal de f milímetros, se tendrá que el valor angular R de una vuelta en segundos de arco será:

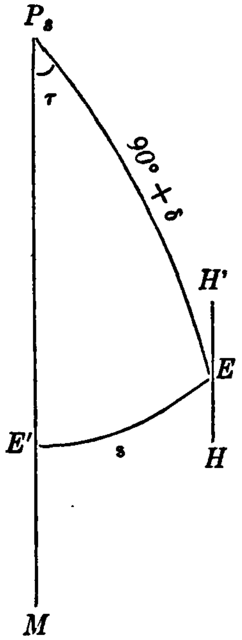
$$R = 206265 \frac{p}{f}$$

Por ejemplo, si un tornillo cuyo paso es de 0.25 mm. se adapta a un anteojo cuyo objetivo tiene una distancia focal de 4 m, se tendrá:

$$R = \frac{206265 \times 0.25}{4000} = 12''9$$

Si el mismo tornillo se adaptara a un anteojo cuya distancia focal fuera de 2 m. el valor angular de la vuelta sería de 25″8. Se ve, pues, que para un determinado tornillo no se puede hablar del valor angular de su paso si no está asociado a determinado instrumento. Este método sólo sirve para tener una idea más o menos aproximada del valor angular de la vuelta del tornillo micrométrico ya que las incertidumbres, tanto en la distancia focal del objetivo del anteojo como en el paso de la hélice, y sobre todo el de esta última, influyen bastante en el resultado obtenido. Así, en el caso del tornillo con paso de 0.25 mm. en un anteojo de distancia focal de 2 m. una incertidumbre de 0.01 mm. en el paso, daría una incertidumbre de 1″ en el valor deducido para la vuelta. También se puede determinar el valor angular de la vuelta del tornillo midiendo en vueltas y fracción de éstas la distancia angular de dos puntos, si ésta es conocida, bastará dividirla por el correspondiente número de vueltas para tener el valor de una de ellas. Como distancia angular conocida puede usarse el diámetro aparente del sol o de la luna o la distancia angular de dos estrellas próximas. Pero en los instrumentos astronómicos, sean éstos los grandes anteojos de los observatorios o los de campaña, el método que se usa casi exclusivamente es el que se basa en el movimiento aparente diurno de la esfera celeste, debido al cual todas las estrellas recorren un paralelo celeste con una velocidad angular constante de 15° por hora sideral. El modo de hacer las observaciones y las reducciones pertinentes dependen del instrumento mismo; pero como los instrumentos de campaña de mayor precisión que se usan actualmente son los universales, que se pueden instalar en el meridiano para determinar la hora por la observación de pasajes de estrellas por dicho plano, o los anteojos zenitales, provistos de niveles Talcott, para las determinaciones de las latitudes geográficas, también por observaciones meridianas, en lo que sigue nos referiremos a la determinación del valor de la vuelta del tornillo micrométrico por observaciones de pasajes en la proximidad del meridiano.

Como se sabe, en el plano focal del objetivo existe un marco fijo al anteojo en el cual se disponen, generalmente, dos sistemas de hilos, perpendiculares los unos a los otros, llamados «hilos fijos», y sobre ese marco se desliza un carro, que lleva también uno o varios hilos llamados «hilos móviles», que son paralelos a los de uno de los sistemas de fijos y perpendiculares al eje del tornillo micrométrico, que controla los desplazamientos del carro. El conjunto de marco y carro se puede hacer girar de modo de dar a los hilos una dirección conveniente. Se empieza entonces por colocar el instrumento de modo que su eje sin colimación quede lo más próximo posible del meridiano, orientando el hilo móvil de modo que sea vertical; esto se consigue fácilmente orientando los fijos perpendiculares al móvil de modo que una estrella ecuatorial los recorra sin salirse de ellos, puesto que en el meridiano las trayectorias aparentes de las estrellas ecuatoriales aparecen como rectas horizontales. Sea *PsM* el meridiano celeste del punto de observación; *HH'*, la proyección del hilo móvil sobre la esfera celeste, y *E* la posición de una estrella en el instante en que su imagen pasa por el hilo *HH'*. Tracemos por *E* la circunferencia máxima *EE'*, perpendicular al meridiano *PsM*. Se obtiene así el triángulo esférico *PsEE'*, rectángulo en *E'*, cuyo lado *PsE* es la distancia polar sur de la estrella, es decir, es igual a $90° + d$, siendo d la declinación de ella; el lado $EE' = s$ es la distancia angular al meridiano de la misma, medida sobre la circunferencia máxima correspondiente (se dice generalmente que s es la distancia ecuatorial de E al meridiano), y el ángulo $EP_sE' = T$ es el ángulo horario de la estrella. Aplicando a este triángulo la analogía de los senos, se obtiene:



$$\text{sen } s.\ \sec \delta = \text{sen } \tau \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Ahora bien, la observación consiste en anotar la hora marcada por un cronómetro regulado sideralmente en el instante en que la estrella pasa por el hilo *HH'* y, al mismo tiempo, la lectura, en vueltas y fracción, de la cabeza del tornillo micrométrico. Sean, entonces:

t = hora cronométrica observada;
l = lectura de la cabeza del tornillo;
t_o = hora cronométrica del pasaje de la estrella por el meridiano;
l_o = lectura del tornillo en el instante t_o, y
R = valor de la vuelta del tornillo en segundos de tiempo. Se tendrá entonces:

$$\tau = t - t_o$$
$$s = R\,(l - l_o)$$

y por lo tanto, reemplazando en (1), se obtiene:

$$\text{sen } R\,(l-l_o).\ \sec.\ \delta = \text{sen } (t-t_o) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Pero $R\,(l\text{-}l_o)$ y $(t\text{-}t_o)$ son ángulos pequeños, de modo que despreciando términos de orden superior al tercero, podemos escribir:

$$R\,(l-l_o) \sec \delta - \frac{1}{6\,\omega^2} R^3\,(l-l_o)^3 \sec \delta = (t-t_o) - \frac{1}{6\,\omega^2}(t-t_o)^3 \ldots\ldots\ldots (3)$$

Como $R\ (l\text{-}l_o)$ y $(t\text{-}t_o)$ los expresamos en segundos de tiempo el valor de ω será la quince ava parte de 206264.8, es decir, $\omega = 13751$. Pero el segundo término del primer miembro de la expresión (3) es también despreciable, en la práctica. En efecto, supongamos que se trate de un anteojo en que la parte del campo utilizable por el tornillo tenga un diámetro de 1.°, siendo, por lo tanto, el valor máximo de $R\ (l\text{-}l_o)$ de 30′, o sea, de 120; resultará entonces:

$$\frac{1}{6\,\omega^2}\ R^3\,(l-l_o)^3 = 0^s.0015$$

Suponiendo, todavía, que se trate de una estrella cuya declinación sea de 86° 11′, que es la máxima compatible con el supuesto campo y con una observación a 30 minutos del meridiano, el término en cuestión valdría sólo $^s.02$, cantidad completamente despreciable si se considera que para una estrella tan próxima del polo las incertidumbres en los valores observados de t pueden ser hasta de algunos segundos.

Sin embargo, en las fórmulas que en seguida deduciremos no los despreciaremos del todo, sino que consideraremos su efecto, reemplazando en él a $R\ (l\text{-}l_o)$ por su valor aproximado $(t\text{-}t_o)\cos\delta$; la fórmula (3) se transforma entonces en:

$$R\ (l-l_o)\sec\delta - \frac{1}{6\,\omega^2}(t-t_o)^3\cos^2\delta = (t-t_o) - \frac{1}{6\,\omega^2}\,(t-t_o)^3$$

y de aquí se obtiene fácilmente:

$$R\ \ (l-l_o)\sec\delta = (t-t_o) - \frac{1}{6\,\omega^2}\ (t-t_o)^3\ sen^2\,\delta\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

En esta fórmula l, t y d son conocidos: los dos primeros son los datos de la observación y d es dado por las efemérides; R, l_o y t_o son las incógnitas, de las cuales sólo nos interesa la primera. Sin embargo, como la corrección del cronómetro se conoce siempre con bastante exactitud (dentro de un segundo) y como la ascensión recta a de la estrella es conocida, se conocerá también t_o t con un error máximo de un segundo; si C es la corrección aproximada del cronómetro, se tendrá, sencillamente:

$$t_o = \alpha - C\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

Introduciendo en el último término de la fórmula (4) este valor de t_o, él quedará determinado con exactitud más que suficiente, pues fácilmente se puede demostrar que un error aún de unos cuantos segundos en el $(t\text{-}t_o)$ que allí figura no influye en forma apreciable en el término mismo. Pongamos:

$$\frac{1}{6\,\omega^2}\ (t-t_o)^3\ sen^2\,\delta = c\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (6)$$

Damos al final una pequeña tabla que da los valores de c con los argumentos $(t\text{-}t_o)$ y δ; el primero se da de 100 en 100 segundos y hasta los 1,200, el segundo de

5.° en 5.°, desde los 60° hasta los 90°. En la práctica no es conveniente tomar estrellas cuya declinación sea inferior a 60° y sería un caso excepcional observar con valores de $(t\text{-}t_o)$ mayores de 1,200 segundos. Con dicha tabla se podría calcular la corrección c aún en el caso de un instrumento con campo de hasta 5.° de diámetro, que es ya excepcionalmente grande. Como se comprende, el signo de c es el de $(t\text{-}t_o)$. La fórmula (4) se puede escribir en la forma:

$$Rl \sec\delta - Rl_o \sec\delta + t_o = t - c$$

Pongamos aún:

$$\left.\begin{aligned} R \sec\delta &= x \\ - Rl_o \sec\delta + t_o &= y \\ t_o - c &= t' \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

La forma de las ecuaciones de condición, con las incógnitas x e y, será entonces:

$$lx - y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

Resolución del Sistema.—Consideremos una serie de punterías con el hilo móvil a la misma estrella, y sean t', t',........, tn las horas cronométricas de ellas y l', l',......... ln las correspondientes lecturas del tornillo micrométrico. Determinado t_o por la fórmula (5), se calculan las correcciones c', c', ..., cn por medio de la fórmula (6), o bien, utilizando la tabla dada al final, obteniéndose luego t'', t'', ..., tn, por la última de las fórmulas (7); tendremos así el sistema:

$$\left.\begin{aligned} l_1 x + y &= t'_1 \\ l_2 x + y &= t'_2 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ l_n x + y &= t'_n \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

Es un sistema de n ecuaciones con dos incógnitas, que resolveremos por el método de los cuadrados mínimos. Para hacerlo en la forma más sencilla, formemos el promedio de todas las ecuaciones (9) y pongamos:

$$l_m = \frac{l_1 + l_2 + \dots\dots\dots\dots + l_n}{n}$$

$$t'_m = \frac{t'_1 + t'_2 + \dots\dots\dots\dots + t'_n}{n}$$

La ecuación promedio será:

$$l_m x + y = t'_m \dots\dots\dots\dots\dots\dots (10)$$

Si a cada una de las ecuaciones (9) le restamos la (10), obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}(l_1 - l_m)\, x = t'_1 - t_m \\ (l_2 - l_m)\, x = t'_2 - t'_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (l_n - l_m)\, x = t'_n - t'_m\end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots (11)$$

De aquí se deduce que la ecuación normal en x será:

$$\Big[(l - l_m)\cdot(l - l_m)\Big]\, x = \Big[(l - l_m)\cdot(t' - t'_m)\Big] \dots\dots\dots\dots (12)$$

Determinado así el valor de x, la primera de las fórmulas (7) da R.

Pero en la práctica, para que los cálculos resulten más sencillos, se procede en la siguiente forma: de alguna de las fórmulas (11) en que el coeficiente de x sea grande; o mejor, de la suma de todas ellas, habiendo previamente multiplicado por (-l) aquellas en que el coeficiente de x es negativo, se obtiene un valor aproximado de x; designémoslo por x_o, y pongamos:

$$x = x_o + \Delta x \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (13)$$

Reemplazando en (11) obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}(l_1 - l_m)\,\Delta x = (t'_1 - t_m') - (l_1 - l_m)\, x_o \\ (l_2 - l_m)\,\Delta x = (t'_2 - t'_m) - (l_2 - l_m)\, x_o \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (l_n - l_m)\Delta x = (t'_n - t'_m) - (l_n - l_m)\, x_o\end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (14)$$

Como Δx será indudablemente una cantidad muy pequeña, los segundos miembros de las ecuaciones (14) también lo serán, facilitándose así enormemente los cálculos numéricos. Para abreviar la escritura, pongamos:

$$(l - l_m) = a$$
$$(t' - t'_m) - (l - l_m)\, x_o = k$$

El sistema se reduce entonces a:

$$\left.\begin{array}{l}a_1\,\Delta x = k_1 \\ a_2\,\Delta x = k_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_n\,\Delta x = k_n\end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (15)$$

y la ecuación normal será:

$$[aa]\,\Delta x = [ak] \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (16)$$

Calculado Δx por esta fórmula, la (13) nos da x y la primera de las (7), el valor R de la vuelta del tornillo micrométrico.

Error probable de x.—Este será, naturalmente, igual al de Δx. Reemplazando en las ecuaciones de condición (15) el valor encontrado de Δx, los primeros miembros de éstas tomarán los valores k'_1, k'_2, ... k'_n y los residuos serán:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = k_1 - k'_1 \\ \varepsilon_2 = k_2 - k'_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_n = k_n - k'_n \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (17)$$

Si suponemos que todas las observaciones tienen igual peso, el error medio, m, de una de ellas será:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-1}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (18)$$

y el error medio, m^o, de x, que es igual al de Δx, será:

$$m_o = \pm \frac{m}{\sqrt{[aa]}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (19)$$

Finalmente, el error probable, η, de x, es:

$$\eta = \pm 0.6745\ m_o \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (20)$$

Error probable de R.—De la primera de las fórmulas (7) se deduce que el error probable de R será igual a $n \cos \delta$, y por lo tanto, si designamos su valor por r, tendremos:

$$r = \pm\ 0.6745\ m_o \cos \delta$$

o sea,

$$r = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-1\ [aa]}} \cos \dots\dots\dots\dots (21)$$

Se puede también determinar el error probable usando sólo las primeras potencias de los residuos. En efecto, si designamos por (ε) la suma de todos los residuos, sin tomar en cuenta sus signos, se ha establecido la siguiente relación:

$$\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = 1.2533\ \frac{[\varepsilon]}{n}$$

Si en (21) reemplazamos el valor que de aquí resulta para $\sqrt{[\varepsilon\varepsilon]}$ se obtiene fácilmente:

$$r = \pm\ 0.8454\ \frac{[\varepsilon]}{\sqrt{n\,(n-1)\ [aa]}} \cos \delta \dots\dots\dots (22)$$

VALORES DE $c = \frac{1}{6\omega^2} (t-t_o)^3 \, sen^2 \, \delta$

δ / $t-t_o$	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
s	s	s	s	s	s	s	s
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
100	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
200	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
300	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
400	0.04	0.05	0.05	0.05	0.05	0.06	0.06
500	0.08	0.09	0.10	0.10	0.11	0.11	0.11
600	0.14	0.16	0.17	0.18	0.18	0.19	0.19
700	0.23	0.25	0.27	0.28	0.29	0.30	0.30
800	0.34	0.37	0.40	0.42	0.44	0.45	0.45
900	0.48	0.53	0.57	0.60	0.62	0.64	0.64
1000	0.66	0.72	0.78	0.82	0.85	0.87	0.88
1100	0.88	0.96	1.04	1.09	1.14	1.16	1.17
1200	1.14	1.25	1.34	1.42	1.48	1.51	1.52

Aplicación.—Se da como ejemplo la determinación hecha del valor angular de la vuelta del tornillo micrométrico del instrumento de pasajes Bamberg N.° 13325 del Observatorio Astronómico de la Universidad de Chile. Es éste un instrumento de gran precisión que lo usamos para la determinación de las variaciones de la latitud geográfica en nuestro Observatorio. Como estas variaciones son sumamente pequeñas (del orden máximo de 1″), y como en el método empleado para obtenerlas la bondad de los resultados depende de la exactitud con que se miden las diferencias de las distancias zenitales de estrellas adecuadas, y esas diferencias nos son dadas muy principalmente por el tornillo micrométrico, el valor angular de la vuelta de éste debe ser determinado con la mayor exactitud posible.

Para hacer la determinación se fué girando el tornillo cada vez de media vuelta, inscribiendo en el cronógrafo la hora del péndulo sideral a que la estrella pasaba por el hilo vertical móvil: son los datos de las columnas «l» y «t». Como se ve, la corrección «c» sólo influyó en 0.ˢ1 en las seis primeras y en la última de las punterías, y se podría perfectamente haber prescindido de ellas sin que el resultado final se hubiera afectado. La forma como se van obteniendo las demás columnas no presenta dificultades; sólo hay que notar que las sumas que aparecen al final de las columnas $(l-l_m)$, $(t'-t'_m)$ y ε son las de sus valores absolutos. Los detalles del cálculo de R que se dan al final de la última página se explican por sí solos; el error probable «r» se calculó empleando tanto los cuadrados de los residuos como las primeras potencias de sus valores absolutos. llegándose, por ambos caminos, a resultados idénticos. Como dato ilustrativo, se puede agregar que el 10 de mayo se había hecho otra determinación de la misma constante y se había obtenido $R = 56''.83$; como se ve, bastante concordante con el valor de 56″.79 obtenido en el estudio que se publica. Además, del examen de los residuos ε de ésta y de otras determinaciones anteriores se puede inducir que el tornillo no adolece de errores periódicos o accidentales apreciables, ya que esos residuos son pequeños y desordenados, debiéndose sus montos únicamente a los inevitables errores de observación.

Determinación del valor angular de la vuelta del tornillo micrométrico del instrumento de pasajes Bamberg N.° 13325

Fecha	1946 mayo 15	Ascención recta .... α =	9h 4m 51s.8
		Declinación .... d =	−85° 27′ 19″.4
Observador	R. Grandón	Correc. Cronóm. .... C =	3s.9
		Hora Cron. pasaje ..... t_o =	9^h 4^m $55^s.7$
Estrella observada	s Octantista		cos δ = 0.79235

l	t	$t—t_o$	c	t'	$a = l—l_m$
v	h m s	s	s	h m s	v
0.0	8 56 57.8	−478	−0.1	8 56 57.9	−9.0
0.5	8 57 22.7	−453	−0.1	8 57 22.8	−8.5
1.0	8 57 45.8	−430	−0.1	8 57 45.9	−8.0
1.5	8 58 9.9	−406	−0.1	8 58 10.0	−7.5
2.0	8 58 33.7	−382	−0.1	8 58 33.8	−7.0
2.5	8 58 58.1	−358	0.0	8 58 58.1	−6.5
3.0	8 59 22.0		0.0	8 59 22.0	−6.0
3.5	8 59 45.0		0.0	8 59 45.0	−5.5
4.0	9 0 9.0		0.0	9 0 9.0	−5.0
4.5	9 0 33.6		0.0	9 0 33.6	−4.5
5.0	9 0 56.7		0.0	9 0 56.7	−4.0
5.5	9 1 20.4		0.0	9 1 20.4	−3.5
6.0	9 1 44.4		0.0	9 1 44.4	−3.0
6.5	9 2 8.0		0.0	9 2 8.0	−2.5
7.0	9 2 31.9		0.0	9 2 31.9	−2.0
7.5	9 2 56.5		0.0	9 2 56.5	−1.5
8.0	9 3 19.8		0.0	9 3 19.8	−1.0
8.5	9 3 44.0		0.0	9 3 44.0	−0.5
9.0	9 4 7.2		0.0	9 4 7.2	0.0
9.5	9 4 32.2		0.0	9 4 32.2	+0.5
10.0	9 4 54.6		0.0	9 4 54.6	+1.0
10.5	9 5 19.7		0.0	9 5 19.7	+1.5
11.0	9 5 43.0		0.0	9 5 43.0	+2.0
11.5	9 6 6.5		0.0	9 6 6.5	+2.5
12.0	9 6 30.9		0.0	9 6 30.9	+3.0

l	t	$t—t_o$	c	t'	$a=$ $l—l_m$
v	h m s	s	s	h m s	v
12.5	9 6 54.4		0.0	9 6 54.4	+3.5
13.0	9 7 19.1		0.0	9 7 19.1	+4.0
13.5	9 7 42.4		0.0	9 7 42.4	+4.5
14.0	9 8 7.0		0.0	9 8 7.0	+5.0
14.5	9 8 30.7		0.0	9 8 30.7	+5.5
15.0	9 8 54.4		0.0	9 8 54.4	+6.0
15.5	9 9 19.5		0.0	9 9 19.5	+6.5
16.0	9 9 44.0		0.0	9 9 44.0	+7.0
16.5	9 10 6.0		0.0	9 10 6.0	+7.5
17.0	9 10 31.0		0.0	9 10 31.0	+8.0
17.5	9 10 55.0	+359	0.0	9 10 55.0	+8.5
18.0	9 11 18.8	+383	+0.1	9 11 18.7	+9.0
v l_m=9.0				h m s t'_m=9 4 8.0	171.0

DETERMINACIÓN DEL VALOR ANGULAR DE LA VUELTA DEL TORNILLO MICROMÉTRICO DEL INSTRUMENTO DE PASAJES BAMBERG N.° 13325

(Continuación)

	$t'-t'_m$	$(l—l_m)\,x_o$	k	aa	ak	k'	ε	$\varepsilon\varepsilon$
	s	s	s			s	s	
	—430.1	−430.0	−0.1	81.00	+0.90	0.0	−0.1	0.01
	−405.2	−406.1	+0.9	72.25	−7.65	0.0	+0.9	0.81
	−382.1	−382.2	+0.1	64.00	−0.80	0.0	+0.1	0.01
	−358.0	−358.4	+0.4	56.25	−3.00	0.0	+0.4	0.16
	−334.2	−334.5	+0.3	49.00	−2.10	0.0	+0.3	0.09
	−309.9	−310.6	+0.7	42.25	−4.55	0.0	+0.7	0.49
	−286.0	−286.7	+0.7	36.00	−4.20	0.0	+0.7	0.49
	−263.0	−262.8	−0.2	30.25	+1.10	0.0	−0.2	0.04
	−239.0	−238.9	−0.1	25.00	+0.50	0.0	−0.1	0.01
	−214.4	−215.0	+0.6	20.25	−2.70	0.0	+0.6	0.36
	−191.3	−191.1	−0.2	16.00	+0.80	0.0	−0.2	0.04
	−167.6	−167.2	−0.4	12.25	+1.40	0.0	−0.4	0.16
	−143.6	−143.3	−0.3	9.00	+0.90	0.0	−0.3	0.09
	−120.0	−119.4	−0.6	6.25	+1.50	0.0	−0.6	0.36

	$t'-t'_m$	$(l-l_m)\,x_o$	k	aa	ak	k'	ε	$\varepsilon\varepsilon$
	−96.1	−95.6	−0.5	4.00	+1.00	0.0	−0.5	0.25
	−71.5	−71.7	+0.2	2.25	−0.30	0.0	+0.2	0.04
	−48.2	−47.8	−0.4	1.00	+0.40	0.0	−0.4	0.16
	−24.0	−23.9	−0.1	0.25	+0.05	0.0	−0.1	0.01
	− 0.8	0.0	−0.8	0.00	0.00	0.0	−0.8	0.64
	+24.2	+23.9	+0.3	0.25	+0.15	0.0	+0.3	0.09
	+46.6	+47.8	−1.2	1.00	−1.20	0.0	−1.2	1.44
	+71.7	+71.7	0.0	2.25	0.00	0.0	0.0	0.00
	+95.0	+95.6	−0.6	4.00	−1.20	0.0	−0.6	0.36
	+118.5	+119.4	−0.9	6.25	−2.25	0.0	−0.9	0.81
	+142.9	+143.3	−0.4	9.00	−1.20	0.0	−0.4	0.16
	+166.4	+167.2	−0.8	12.25	−2.80	0.0	−0.8	0.64
	+191.1	+191.1	0.0	16.00	0.00	0.0	0.0	0.00
	+214.4	+215.0	−0.6	20.25	−2.70	0.0	−0.6	0.36
	+239.0	+238.9	+0.1	25.00	+0.50	0.0	+0.1	0.01
	+262.7	+262.8	−0.1	30.25	−0.55	0.0	−0.1	0.01
	+286.4	+286.7	−0.3	36.00	−1.80	0.0	−0.3	0.09
	+311.5	+310.6	+0.9	42.25	+5.85	0.0	+0.9	0.81
	+336.0	+334.5	+1.5	49.00	+10.50	0.0	+1.5	2.25
	+358.0	+358.4	−0.4	56.25	−3.00	0.0	−0.4	0.16
	+383.0	+382.2	+0.8	64.00	+6.40	0.0	+0.8	0.64
	+407.0	+406.1	+0.9	72.25	+7.65	0.0	+0.9	0.81
	+430.7	+430.0	+0.7	81.00	+6.30	0.0	+0.7	0.49
Sumas	8170.1			1054.50	+3.90		18.1	13.35

$$x_o = \frac{8170.1}{171} = 47^s.7800$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{13.35}{36}} = \pm\, 0^s.61$$

$$\Delta x = +\frac{3.90}{1054.50} = +\,0.^s0037$$

$$m_o = \pm\frac{0.61}{\sqrt{1054.5}} = \pm\, 0^s.019$$

$$\eta = \pm\, 0.6745 \times 0.019 = \pm\, 0^s013$$

$$x = 47^s.7837 \pm 0.^s013$$

$$r = \pm\, 0^s.013 \cos\delta = \pm\, 0.0010$$

$$R = 47^s.7837 \cos\delta$$

$$[\varepsilon] = 18^s.1$$

$$R = 3^s.786 \pm 0.001$$

$$r = \pm\frac{0.8454 \times 18.1 \times 0.0792}{\sqrt{38 \times 37 \times 1054.50}}$$

$$R = 56''.79 \pm 0''.015$$

$$[\varepsilon\varepsilon] = 13.35$$

$$r = \pm\, 0^s.0010$$